

Matematică

algebră, analiză matematică

Clasa a XI-a

- pentru pregătirea la clasă și bacalaureat -



Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Iași - 2019

Teste de evaluare inițială	11	 222
---	-----------	-----------------

ALGEBRĂ

Capitolul I. Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare

1. Permutări	15	 222
1.1. Noțiunea de permutare, operații, proprietăți	15	
1.2. Produsul (compunerea) permutărilor	15	
1.3. Transpoziții	16	
1.4. Inversiunile unei permutări. Semnul (signatura) unei permutări ..	16	
1.5. Evaluare sumativă	18	
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat	19	 223
Test de autoevaluare.....	20	
2. Matrice	22	 223
2.1. Operații cu matrice	22	
2.2. Evaluare sumativă	29	
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat	30	 224
Test de autoevaluare.....	35	
3. Determinanți	36	 225
3.1 Proprietăți ale determinanților	36	
3.2. Calculul determinantului de ordinul n	37	
3.3. Aplicații	38	
3.4. Evaluare sumativă	42	 226
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat	43	 227
Test de autoevaluare.....	49	
4. Rangul unei matrice. Matrice inversabilă	50	 228
4.1. Etapele determinării inversei unei matrice	51	
4.2. Ecuații matriceale	52	
4.3. Evaluare sumativă	55	 229
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat	55	 229
Test de autoevaluare.....	59	
5. Sisteme de ecuații liniare	60	 230
5.1. Regula lui Cramer	61	
5.2. Teorema lui Kronecker–Capelli	62	
5.3. Teorema lui Rouché	62	
5.4. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare	63	
5.5. Sisteme de ecuații liniare omogene	65	
5.6. Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare	66	
5.7. Evaluare sumativă	71	 231

Probleme pregătitoare pentru bacalaureat	72	 231
Test de autoevaluare.....	79	

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul II. Limite de funcții	81	
1. Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală	81	 232
1.1. Proprietățile algebrice ale lui $\mathbb{R}$	81	
1.2. Proprietățile de ordine ale lui $\mathbb{R}$	81	
1.3. Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{R}$	82	
2. Funcții reale de variabilă reală	86	
2.1. Funcția polinomială	86	
2.2. Funcția rațională	86	
2.3. Funcția putere	86	
2.4. Funcția exponențială	86	
2.5. Funcția logaritmică	87	
2.6. Funcțiile trigonometrice și inversele lor	87	
3. Limita unui șir utilizând vecinătăți, proprietăți. Șiruri convergente	90	 232
3.1. Criterii suficiente de convergență	90	
3.2. Operații cu șiruri convergente	91	
3.3. Calculul limitelor unor șiruri	91	
3.4. Lema lui Stolz – Cesàro	92	
3.5. Evaluare sumativă	96	 233
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat	97	 233
4. Limite de funcții	98	 233
4.1. Limita unei funcții într-un punct	98	
4.2. Limite laterale	98	
4.3. Operații cu limite de funcții	99	
4.4. Asimptotele graficului funcțiilor reale	99	
4.5. Calculul limitelor de funcții	100	
4.6. Limite remarcabile	101	
4.7. Evaluare sumativă	106	 233
Test de autoevaluare.....	107	
Capitolul III. Continuitate	108	
1. Funcții continue într-un punct	108	
1.1. Continuitate laterală	108	
1.2. Prelungirea prin continuitate a unei funcții	108	
1.3. Puncte de discontinuitate de speța I și speța a II-a	109	
2. Operații cu funcții continue	109	 234
2.1. Funcții cu proprietatea lui Darboux	109	
2.2. Inversarea funcțiilor continue	109	
2.3. Evaluare sumativă	114	 234
Test de autoevaluare.....	115	

Respe	Capitolul IV. Derivabilitate	117	
1.	Derivata unei funcții într-un punct	117	
1.1.	Derivate laterale	117	
2.	Interpretarea geometrică a derivatelor laterale	117	
2.1.	Puncte remarcabile ale graficului unei funcții	117	
3.	Operații cu funcții derivabile. Derivatele unor funcții uzuale	119	 234
3.1.	Reguli de derivare	119	
3.2.	Derivarea funcțiilor inverse	120	
3.3.	Derivate de ordin superior	120	
3.4.	Evaluare sumativă	128	 236
	Test de autoevaluare	129	
4.	Proprietățile funcțiilor derivabile	130	 236
4.1.	Puncte de extrem. Teorema lui Fermat	130	
4.2.	Teorema lui Rolle	130	
4.3.	Teorema lui Lagrange	130	
4.4.	Teorema lui Cauchy	130	
4.5.	Teorema lui Darboux	131	
4.6.	Regula lui ℓ' Hospital	131	
5.	Aplicații ale derivatelor în studiul variației funcțiilor	147	
5.1.	Rolul primei derivate în studiul funcțiilor	147	
5.2.	Intervale de monotonie	147	
5.3.	Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor. Convexitatea și concavitata	147	
6.	Reprezentarea grafică a funcțiilor	148	
6.1.	Etapile reprezentării grafice	148	
	Probleme pregătitoare pentru bacalaureat	151	 237
	Test de autoevaluare	155	

PROBLEME RECAPITULATIVE

ANALIZĂ MATEMATICĂ	156	 239
--------------------	-----	----------

MODELE DE TEZE SEMESTRIALE	196	 268
----------------------------	-----	----------

SIMULARE BACALAUREAT	200	 270
----------------------	-----	----------

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT. CONCURSUL DE ADMITERE ÎN

ÎNVĂȚĂMÂNTUL SUPERIOR ȘI CONCURSURI ȘCOLARE	...203	 271
---	--------	----------

INDICAȚII, REZOLVĂRI, SOLUȚII	222	
-------------------------------	-----	--

Soluții teste autoevaluare	290	
----------------------------	-----	--

Bibliografie	293	
--------------	-----	--

Capitolul I. Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare

1. Permutări

1.1. Noțiunea de permutare, operații, proprietăți

Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. O funcție bijectivă $\sigma : A \rightarrow A$ se numește **permutare** (substituție) de gradul n . Se notează mulțimea tuturor permutărilor de gradul n cu S_n sau σ_n , iar elementele din S_n le vom nota cu litere mici grecești: $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi, \theta, \sigma, \tau$.

O permutare σ de gradul n se reprezintă printr-un tablou de forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Numărul tuturor permutărilor de gradul n , adică numărul tuturor funcțiilor bijective ale unei mulțimi cu n elemente în ea însăși, este egal cu $n!$.

Permutarea identică se notează cu e și avem:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

1.2. Produsul (compunerea) permutărilor

Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, iar σ și φ , două permutări de gradul n , adică $\sigma \in S_n$, $\varphi \in S_n$. Permutarea $\sigma \circ \varphi$, definită prin $(\sigma \circ \varphi)(a) = \sigma(\varphi(a))$, $\forall a \in A$, se numește **produsul** (sau compunerea) permutărilor σ și φ .

$$\text{Dacă } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ și } \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix},$$

$$\text{atunci } \sigma \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(\varphi(1)) & \sigma(\varphi(2)) & \sigma(\varphi(3)) & \dots & \sigma(\varphi(n)) \end{pmatrix}.$$

Observație. Se mai scrie $\sigma \circ \varphi = \sigma\varphi$; operația de compunere a permutărilor se mai numește **înmulțirea** permutărilor.

Exemplu. Să considerăm permutările de gradul 3, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Produsul $\sigma\varphi$ este permutarea $\sigma\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
iar $\varphi\sigma$ este permutarea $\varphi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Observăm că $\sigma\varphi \neq \varphi\sigma$.

Proprietățile înmulțirii permutărilor

1. Înmulțirea permutărilor este asociativă, adică $\forall \alpha, \beta, \gamma \in S_n$, avem $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.
2. Elementul neutru. Permutarea $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ are proprietatea că $e\sigma = \sigma e = \sigma$, $\forall \sigma \in S_n$.
3. Orice permutare are o inversă, adică $\forall \sigma \in S_n$, $\exists \sigma^{-1} \in S_n$, astfel încât $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.
4. Înmulțirea permutărilor nu este, în general, comutativă.

1.3. Transpoziții

Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ și $i, j \in A$, $i \neq j$. Se numește **transpoziție**, și se notează τ_{ij} sau (ij) , permutarea $\tau_{ij} = (ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale transpoziției

1. $(ij) = (ji)$;
2. $(ij)^{-1} = (ij)$;
3. $(ij)^2 = e$.

Numărul tuturor transpozițiilor de gradul n este egal cu C_n^2 .

1.4. Inversiunile unei permutări. Semnul (signatura) unei permutări

Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ și M , submulțimea produsului cartezian $A \times A$, definită prin: $M = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n , atunci o pereche ordonată $(i, j) \in M$ se numește **inversiune** a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Vom nota cu $m(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor permutării σ . Avem: $0 \leq m(\sigma) \leq C_n^2$.

Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește **semnul** (sau signatura) permutării σ .

Permutarea σ se numește **pară** dacă $\varepsilon(\sigma) = +1$, adică pentru $m(\sigma)$ par.

Permutarea σ se numește **impară** dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$, adică pentru $m(\sigma)$ impar.

Exemplu. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Numărul de inversiuni al permutării σ este $m(\sigma) = 1 + 1 = 2$.

Semnul permutării σ este $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2 = +1$, adică σ este permutare pară.

Propoziție. Orice transpoziție este impară.

Dacă $\tau_{ij} = (ij)$, $i < j$, atunci $\varepsilon(\tau_{ij}) = -1$.

Propoziție. Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n , atunci semnul permutării σ este dat de formula:

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Propoziție. Dacă σ și ϕ sunt permutări de gradul n , atunci $\varepsilon(\sigma\phi) = \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\phi)$.

Propoziție. Orice permutare de gradul n , ($n \geq 2$), este un produs de transpoziții.

Exemplu. Considerăm permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și o scriem ca produs de transpoziții.

Avem $\sigma(1) = 3$; considerăm transpoziția τ_{13} și facem produsul

$$\sigma_1 = \tau_{13} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \tau_{24}.$$

Din $\tau_{24} = \tau_{13} \cdot \sigma$ rezultă $\sigma = \tau_{13}\tau_{24}$.

Consecințe

1. Permutarea $\sigma\phi$ este pară dacă permutările σ și ϕ au același semn.
2. Permutarea $\sigma\phi$ este impară dacă permutările σ și ϕ au semne contrare.
3. Orice permutare pară este un produs al unui număr par de transpoziții.
4. Orice permutare impară este un produs al unui număr impar de transpoziții.
Vom nota cu A_n mulțimea permutărilor pare de gradul n .
5. Dacă σ și ϕ sunt permutări pare de gradul n , adică $\sigma \in A_n$, $\phi \in A_n$, atunci $\sigma\phi \in A_n$ și $\sigma^{-1} \in A_n$. În plus, $e \in A_n$.
6. Numărul permutărilor pare de gradul n este $\frac{n!}{2}$, adică A_n are $\frac{n!}{2}$ elemente.

Exerciții propuse

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $\sigma\phi$ și $\phi\sigma$.

2. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze permutările: $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \dots$

și să se determine cel mai mic număr natural nenul k , pentru care $\sigma^k = e$.

3. Fie $\sigma \in S_n$. Să se arate că există un număr natural nenul p , astfel încât $\sigma^p = e$.

4. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Să se arate că $\sigma\tau = \tau\sigma$.

5. Să se scrie numărul de inversiuni și semnul fiecăreia dintre permutările:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Să se scrie toate transpozițiile de gradul 3.

7. Să se scrie toate transpozițiile de gradul 4.

8. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se scrie σ ca produs de transpoziții.

9. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$.

Să se determine numărul de inversiuni ale permutării σ .

Să se determine n , astfel încât σ să fie permutare pară.

10. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$.

Să se determine numărul de inversiuni ale permutării σ .

Să se determine n , astfel încât σ să fie permutare pară.

11. Să se arate că orice permutare $\sigma \in S_n$ este un produs de transpoziții de forma $(1\ 2); (1\ 3); \dots; (1\ n)$.

1.5. Evaluare sumativă

Testul I

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.

2. Să se determine permutarea $\sigma \in S_6$ care are numărul maxim de inversiuni.

3. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & i & 4 & 3 & 7 & j & 6 \end{pmatrix}$. Să se determine i și j , astfel încât σ să fie: a) pară; b) impară.

4. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Să se scrie σ ca produs de transpoziții.

Testul II

- Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze puterile: $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \dots$
 - Să se determine cel mai mic număr natural $k > 0$, pentru care $\sigma^k = e$.
- Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine:
 - numărul de inversiuni ale permutării σ^{-1} ;
 - signatura permutării σ^{-1} .
- Să se scrie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ca produs de transpoziții de forma $(1\ k)$, unde $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.
- Fie permutarea $\sigma \in S_{10}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.
Permutarea σ este pară sau impară?

Probleme pregătitoare pentru bacalaureat

- Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$, mulțimea S_n a permutărilor de n elemente și permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$.
 - Pentru $n = 4$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$, să se calculeze σ^4 .
 - Să se demonstreze că, pentru orice $\sigma \in S_n$, există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^p = e$.
 - Să se arate că, pentru $n \geq 3$, există $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$, astfel încât $\sigma^n = \sigma$.
(Bacalaureat 2008, M₁, varianta 6)
- Se consideră permutările $e, \alpha \in S_3$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - Să se rezolve ecuația $\alpha^{2008} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

- b) Să se calculeze $\sum_{\sigma \in S_3} m(\sigma)$, unde $m(\sigma)$ este numărul inversiunilor permutării $\sigma \in S_3$.
- c) Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este diferit de permutarea identică $e \in S_3$.
(Bacalaureat 2008, M₁, varianta 10)
3. În mulțimea S_3 a permutărilor de 3 elemente se consideră permutarea
- $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
- a) Să se verifice că permutarea σ este pară.
b) Să se determine toate permutările $x \in S_3$, astfel încât $x\sigma = \sigma x$.
c) Pentru $k \in \mathbb{N}$ fixat, să se determine toate permutările $y \in S_3$, astfel încât $y^k = \sigma$.
(Bacalaureat 2008, M₁, varianta 25)
4. Se consideră permutarea $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Să se determine σ^{-1} .
b) Să se arate că permutările σ și σ^{-1} au același număr de inversiuni.
c) Să se arate că ecuația $x^4 = \sigma$ nu are soluții în S_6 .
(Bacalaureat 2008, M₁, varianta 52)
5. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$.
- a) Să se determine mulțimea $A = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
b) Să se arate că toate elementele mulțimii A sunt permutări pare.
c) Să se găsească permutarea $\tau \in S_5$, astfel încât suma $\alpha = \sum_{k=1}^5 \sigma(k)\tau(k)$ să ia valoarea maximă.
(Bacalaureat 2008, M₁, varianta 80)

Test de autoevaluare

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.
(30 puncte)

- 10p 1. Produsul permutărilor $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este permutarea
- 10p 2. Cel mai mic număr natural nenul k , pentru care $\sigma^k = e$, unde

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, este

10p 3. Numărul de inversiuni al permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este

II. Încercuiți răspunsul corect. (30 puncte)

10p 1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci σ^2 este:

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10p 2. Inversa permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ este:

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

10p 3. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Soluția ecuației $\sigma \cdot x = \tau$ este:

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

III. Scrieți rezolvările complete. (30 puncte)

10p 1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & i & 4 & 3 & 7 & j & 6 & 8 \end{pmatrix}$. Determinați i și j , astfel

încât permutarea σ să fie:

- a) pară;
b) impară.

10p 2. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 12 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 24 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$. Determinați numărul natural n , astfel încât permutarea σ să fie impară.

10p 3. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Scrieți permutarea σ ca produs de transpoziții.

2. Matrice

Fie $\mathbb{C}$, mulțimea numerelor complexe, $M = \{1, 2, \dots, m\}$, mulțimea primelor m numere naturale nenule, și $N = \{1, 2, \dots, n\}$, mulțimea primelor n numere naturale nenule.

Vom numi **matrice** de tipul (m, n) o funcție $A : M \times N \rightarrow \mathbb{C}$.

Dacă notăm $A(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i \in M$, $j \in N$, vom scrie:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sub forma unui tablou cu m linii și n coloane ce cuprinde valorile funcției A .

Vom nota cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ mulțimea tuturor matricelor de tipul (m, n) având elemente din mulțimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe.

Dacă $m = n$, se notează $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n . În acest caz, sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ se numește **diagonala principală** a matricei pătratice A , iar sistemul ordonat de elemente $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1})$ se numește **diagonala secundară** a matricei pătratice A .

Suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătrate A se numește **urma** matricei A și se notează $\text{Tr}(A)$, adică $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

Proprietăți ale urmei matricei

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Au loc egalitățile:

- a) $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$;
- b) $\text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A)$;
- c) $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

2.1. Operații cu matrice

1) Adunarea matricelor

Fie A și B , două matrice de același tip, $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, unde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Definim matricea $C = (c_{ij})$, cu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, ca fiind suma dintre matricele A și B ; scriem $C = A + B$.

Exemplu. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

$$\text{Avem } A + B = \begin{pmatrix} 1+(-2) & i+0 & -1+1 \\ 0+3 & -1+2 & 2+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Proprietățile adunării matricelor

1°) Adunarea matricelor este **comutativă**, adică oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, avem $A + B = B + A$.

2°) Adunarea matricelor este **asociativă**, adică oricare ar fi $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, avem $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3°) Element **neutru**. Matricea $0_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, cu toate elementele egale cu zero, este element neutru pentru adunarea matricelor, adică oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, avem $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A$.

4°) Orice matrice are un **opus**, adică oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, există matricea notată $-A$, astfel încât $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m,n}$.

Matricea $-A = (-a_{ij})$, dacă $A = (a_{ij})$.

2) Înmulțirea matricelor

Fie $A = (a_{ij})$, o matrice de tipul (m, n) , și $B = (b_{jk})$, o matrice de tipul (n, p) .

Definim matricea $C = (c_{ik})$, de tipul (m, p) , unde

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}.$$

Matricea C se numește **produsul** dintre matricele A și B și se notează $C = AB$.

Exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Deoarece A este o matrice de tipul $(2, 3)$ și B o matrice de tipul $(3, 2)$,

$$\begin{aligned} \text{are sens produsul } AB \text{ și obținem: } AB &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) & 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$